Uwaga. W rozwiązaniu zadania nie występuje wynik pomiaru $2r=30{,}0$ mm. To oznacza, że jeżeli wszystkie wymiary liniowe pudełka zmierzymy z błędem względnym α, to będziemy mieli objętość z błędem względnym 3α (gdzie α jest liczbą dostatecznie małą).

Zadania

Obliczyć pochodne następujących funkcji (zad. 6.45 - 6.200):

6.45. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{13}{5}x^5-2x^6$.

6.46. $y=5x^{15}-x^2+\frac{1}{3}x-2$.

6.47. $y=ax^3+\dfrac{b}{x}+c$.

6.48. $y=\dfrac{4}{x^3}$.

6.49. $y=9x^7+3x^{-5}-3x^{-11}$.

6.50. $y=3x^{7/3}-4x^{13/4}+\frac{4}{7}x^{-1/2}+7^{3/2}$.

6.51. $y=\sqrt[5]{x^2}$.

6.52. $y=5\sqrt[3]{x^7}$.

6.53. $y=3\sqrt[3]{x}-x^3+\frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$.

6.54. $y=\sqrt{x}-\frac{5}{6}\sqrt[5]{x^3}-2\sqrt{x^3}$.

6.55. $y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt[3]{x}$.

6.56. $y=\dfrac{5}{\sqrt[7]{x}}-2x^7+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

6.57. $x=t^3\sqrt{t}$.

6.58. $y=\dfrac{2}{x^3\sqrt{x}}$.

6.59. $y=(2\sqrt[3]{x^2}-x)(4\sqrt[3]{x^4}+2\sqrt[3]{x^5}+x^2)$.

6.60. $y=(4x^2-2x\sqrt{x}+x)(2x+\sqrt{x})$.

6.61. $y=\dfrac{3}{3x-2}$.

6.62. $y=\dfrac{5}{2x^2-5x+1}$.

6.63. $y=\dfrac{3x^2}{7x^5-x+2}$.

6.64. $y=\dfrac{8x^3}{x^3+x-1}$.

6.65. $y=2\dfrac{x+1}{x-1}$.

6.66. $y=\dfrac{5x^2+x-2}{x^2+7}$.

6.67. $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$.

6.68. $y=\dfrac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$.

6.69. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$.

6.70. $z=\dfrac{1+\sqrt{t}}{1+\sqrt{2t}}$.

6.71. $s=(3t+1)^7$.

6.72. $v=(4z^2-5z+13)^5$.

6.73. $x=\left(\dfrac{1}{t}+4\right)^4$.

6.74. $s=\left(7t^2-\dfrac{4}{t}+6\right)^6$.

6.75. $y=\sqrt{x^2-4}$.

6.76. $z=\sqrt{ax^2+bx+c}$.

6.77. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-3t}}$.

6.78. $s=\dfrac{1}{\sqrt{6t-t^2}}$.

6.79. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(2-x^3)^4}}$.

6.80. $y=\dfrac{1}{\sqrt[n]{(a+bx)^p}}$.

6.81. $y=\dfrac{1}{(b-x^p)^n}$.

6.82. $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$.

6.83. $u=\dfrac{1}{v-\sqrt{a^2+v^2}}$.

6.84. $y=\dfrac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad a>0$.

6.85. $v=\dfrac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}$.

6.86. $y=\dfrac{3\sqrt{x}}{x^2+1}$.

6.87. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.

6.88. $z=\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}$.

6.89. $z=\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$.

6.90. $s=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}}$.

6.91. $u=\dfrac{\sqrt{1+v}-\sqrt{1-v}}{\sqrt{1+v}+\sqrt{1-v}}$.

6.92. $y=uvw$, gdzie u, v, w są funkcjami różniczkowalnymi zmiennej x.

6.93. $v=\cos\dfrac{t}{a}, \quad a\neq 0$.

6.94. $x=a\sin bt$.

6.95. $y=a\sin\dfrac{a}{x}$.

6.96. $z=2x+\sin 2x$.

6.97. $s=\sin^2 3t$.

6.98. $v=4\cos^5 \frac{1}{4}t$.

6.99. $s=\dfrac{1}{\cos^4 t}$.

6.100. $v=\dfrac{5}{\sin^3 2t}$.

6.101. $s=\dfrac{\sin t+\cos t}{2\sin 2t}$.

6.102. $z=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}$.

6.103. $y=\dfrac{x\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$.

6.104. $y=\dfrac{x}{\sin x+\cos x}$.

6.105. $y=\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$.

6.106. $y=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x$.

6.107. $y=\operatorname{tg}^4\sqrt{x}$.

6.108. $y=3\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}^3 x$.

6.109. $y=e^{ax}(a\sin x-\cos x)$.

6.110. $y=x^2 e^{2x}\sin x$.

6.111. $y=\cos^2\sqrt{\dfrac{1}{x}}$.

6.112. $y=2\sin^3\sqrt{\dfrac{3}{x}}$.

6.113. $y=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^7 x}-\dfrac{2}{5\cos^5 x}$.

6.114. $y=\dfrac{3\cos^2 x}{\sin^3 x}$.

6.115. $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{x+2\sqrt{x}}}$.

6.116. $y=\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$.

6.117. $z=\dfrac{3\operatorname{tg} u-\operatorname{tg}^3 u}{1-3\operatorname{tg}^2 u}$.

6.118. $z=\operatorname{tg} u-\operatorname{ctg} u-2u$.

6.119. $y=(4\sin x-8\sin^3 x)\cos x$.

6.120. $y=\operatorname{arctg} 3x$.

6.121. $y=7\operatorname{arctg}\frac{1}{2}x$.

6.122. $x=\arcsin(1-t)$.

6.123. $x=\arccos\sqrt{1-t^2}$.

6.124. $x=\arcsin\sqrt{t^3}$.

6.125. $x=\arcsin\dfrac{1}{t}$.

6.126. $y=\arcsin x+\arcsin\sqrt{1-x^2}$, $\quad 0<x<1$.

6.127. $x=\arcsin 2t\sqrt{1-t^2}$.

6.128. $y=\operatorname{arctg}(x-\sqrt{x^2+1})$.

6.129. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

6.130. $y=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

6.131. $y=\frac{1}{5}x^5\operatorname{arctg} x-\frac{1}{20}x^4+\frac{1}{10}x^2-\frac{1}{10}\ln(1+x^2)$.

6.132. $y=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

6.133. $y=\arccos\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$.

6.134. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

6.135. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$, $\quad x\neq 1$.

6.136. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$.

6.137. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

6.138. $y=\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{arcctg} 2x}$.

6.139. $z=\sqrt{\dfrac{1-\arcsin y}{1+\arcsin y}}$.

6.140. $y=x^3 \operatorname{arctg} x^3$.

6.141. $z=\dfrac{\arcsin 4y}{1-4y}$.

6.142. $y=\dfrac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[2 \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1\right)\right]-x$.

6.143. $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \arcsin \dfrac{a\cos x+b}{a+b\cos x}$.

6.144. $y=e^{3x}$.

6.145. $y=5e^{\frac{1}{2}x}$.

6.146. $y=e^x f(x)$.

6.147. $y=3e^{-2x} g(x)$.

6.148. $y=e^{\sin x}$.

6.149. $y=5e^{\cos x}$.

6.150. $y=e^{\cos^2 x}$.

6.151. $y=3e^{2\sin^3 x}$.

6.152. $z=(v^3-3v^2+6v-6)e^v$.

6.153. $z=(10x^2-1)e^{3x}$.

6.154. $z=\dfrac{(2x-1)e^x}{2\sqrt{x}}$.

6.155. $y=(x+k\sqrt{1-x^2})e^{k \arcsin x}$.

6.156. $y=5^x+2^x$.

6.157. $y=3^x x^3$.

6.158. $y=2\cdot 7^x-1$.

6.159. $y=5\cdot 10^{3x}$.

6.160. $y=a^{2x}x^n$, $\quad a>0$.

6.161. $y=\ln 3x$.

6.162. $y=7\cdot 5^{10x}$.

6.163. $z=\ln\dfrac{30}{x+3}$.

6.164. $y=5\ln 10x$.

6.165. $s=\ln(t+\sqrt{t^2+1})$.

6.166. $z=3\ln\dfrac{5}{x-2}$.

6.167. $s=\ln\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$.

6.168. $y=2\ln\dfrac{3}{t+\sqrt{t^2-4}}$.

6.169. $y=\ln\big|\ln|x|\big|$.

6.170. $y=\ln\left(\dfrac{a+b\operatorname{tg}x}{a-b\operatorname{tg}x}\right)$.

6.171. $y=\ln\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x)$, $\quad 0<x<\frac{1}{2}\pi$.

6.172. $y=\ln(\cos\frac{1}{2}x)^2$.

6.173. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

6.174. $y=15\ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+\dfrac{\cos x}{\sin^4 x}(8\cos^4 x-25\cos^2 x+15)$.

6.175. $y=\ln(\ln(\ln x))$, $\quad x>e$.

6.176. $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

6.177. $y=\ln\sin x$.

6.178. $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $0\leqslant x<1$.

6.179a. $y=\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)$.

6.179b. $y=\ln(e^{mx}+e^{-mx})$.

6.180. $y=\log_x\ln x$. Wskazówka. $y=\dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$.

6.181. $y=\log_x a$. Wskazówka. $\log_x a=\dfrac{\ln a}{\ln x}$.

6.182. $y=x^{5x}$, $x>0$.

6.183. $y=10x^{-3x}$, $x>0$.

6.184. $y=x^{\sin x}$, $x>0$.

6.185. $y=3x^{\cos x}$, $x>0$.

6.186. $y=\left(\dfrac{a}{x}\right)^x$, $a>0$, $x>0$.

6.187. $y=x^{\frac{1}{x}}$, $x>0$.

6.188. $y=a^{\ln x}$, $a>0$, $x>0$.

6.189. $y=5^{\ln 2x}$, $x>0$.

6.190. $y=x^{\frac{1}{\ln x}}$, $x>0$; wyjaśnić wynik.

6.191. $y=(\sin x)^{\cos x}$, $0<x<\frac{1}{2}\pi$.

6.192. $y=(\operatorname{arctg} x)^x$, $x>0$.

6.193. $y=(\operatorname{tg} x)^{\sin x}$, $0<x<\frac{1}{2}\pi$.

6.194. $y=(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\cos x}}$, $0<x<\frac{1}{2}\pi$.

6.195. $y=(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$, $0<x<\frac{1}{2}\pi$.

6.196. $y=e^{e^x}$.

6.197. $y=x^{e^x}$, $x>0$.

6.198. $y=x^{x^x}$, $x>0$.

6.199. $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

6.200. $y=\sqrt[x]{\dfrac{1}{x}}$.

Dane są równania określające ruch punktu; znaleźć prędkość ruchu w danym momencie t (zad. 6.201 - 6.204):

6.201. $s=3t^{-\frac{1}{2}}$, $t=\frac{1}{4}$.

6.202. $s=10\sqrt{t^3}$, $t=4$.

6.203. $s=8\sqrt[3]{2t^5}$, $t=2$.

6.204. $s=\sqrt{3t}$, $t=2$.

6.205. Obliczyć kąt, który tworzy z osią Ox styczna do linii $y=\sin x$ w początku współrzędnych.

6.206. Jaki kąt z osią Ox tworzy linia $y=\operatorname{ctg} x$ w punkcie $x=\frac{1}{2}\pi$?

6.207. W jakim punkcie styczna do linii $y=(x-8)/(x+1)$ tworzy z osią Ox kąt równy połowie kąta prostego?

6.208. Znaleźć na linii $y=e^x$ punkt, w którym styczna jest równoległa do prostej $x-y+7=0$.

6.209. Wykazać, że styczna do hiperboli równoosiowej $xy=C$ ogranicza z osiami współrzędnych trójkąt o stałym polu.

6.210. W dowolnym punkcie asteroidy

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$$

poprowadzono do niej styczną. Wykazać, że długość odcinka stycznej zawartego pomiędzy osiami współrzędnych jest stała.

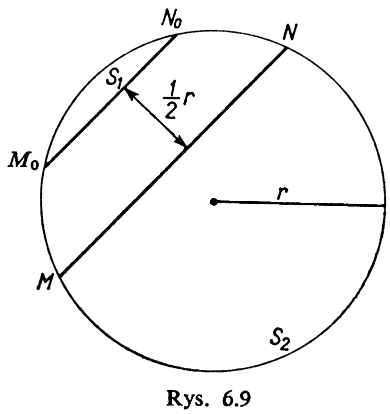
6.211. Jaki związek powinien zachodzić pomiędzy współczynnikami równania paraboli $y=x^2+px+q$, żeby ta parabola była styczna do osi odciętych?

6.212. Jaki związek powinny spełniać współczynniki p i q w równaniu $y=x^3+px+q$, aby linia przedstawiona tym równaniem (parabola stopnia trzeciego) była styczna do osi Ox?

6.213. W jakim punkcie krzywej logarytmicznej $y=\ln x$ styczna jest równoległa do prostej $y=2x$?

6.214. Pod jakim kątem przecinają się krzywe $y=\sin x$ i $y=\cos x$?

6.215. Dwie proste przecinają się pod kątem 60°. Z punktu O ich przecięcia wyruszają dwa ciała. Pierwsze ciało porusza się ruchem jednostajnym z prędkością 5 km/h, drugie porusza się zgodnie z prawem $S=2t^2+t$, gdzie S oznacza drogę w kilometrach, a t czas w godzinach. Określić, z jaką prędkością oddalają się one od siebie w chwili, gdy ciało pierwsze znajduje się w odległości 10 km od punktu O.



Rys. 6.9

6.216. Dwa boki trójkąta powiększają się jednostajnie z prędkością 4 cm/s i 6 cm/s, natomiast kąt zawarty między nimi zmniejsza się z prędkością $\frac{1}{10}\sqrt{3}\,\mathrm{s}^{-1}$. Określić prędkość zmiany pola tego trójkąta w chwili, gdy jego boki i kąt odpowiednio równe są 20 cm, 50 cm i 30°.

6.217. W okręgu o promieniu r cięciwa MN z położenia M_0N_0 przesuwa się równolegle ze stałą prędkością $v=2$. Z jaką prędkością zmieniają się pola S_1 i S_2 dwóch obszarów, na jakie cięciwa MN dzieli okrąg, w chwili gdy znajduje się ona w odległości równej $\frac{1}{2}r$ od położenia początkowego (rys. 6.9).